

Mécanique des structures



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

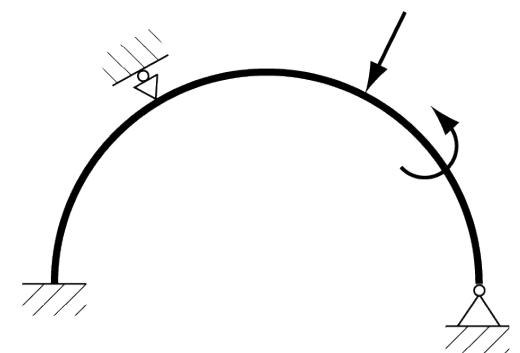
EPFL

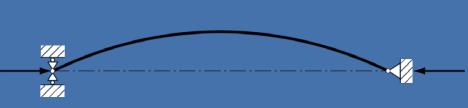




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Rappel





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Rappel



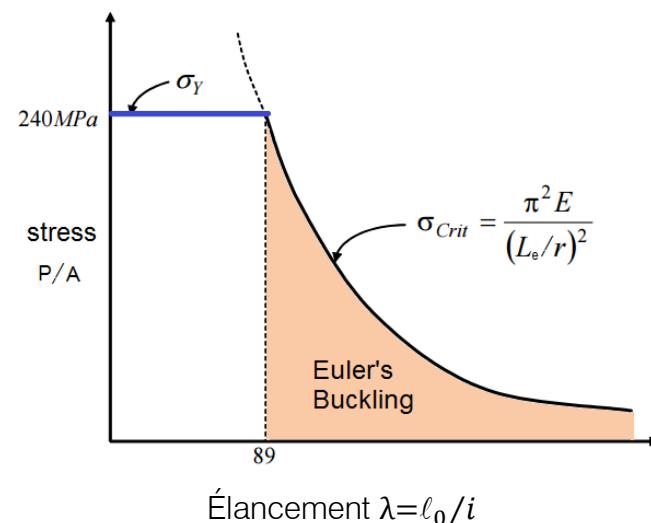
Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Introduction

Objectif : Prédire si une poutre va se casser par rupture de matériau ou par flambage

Une poutre se casse soit car :

- On a un dépassement de la **contrainte maximum** de rupture du matériau
- On a dépassement de la **contrainte de flambage**



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

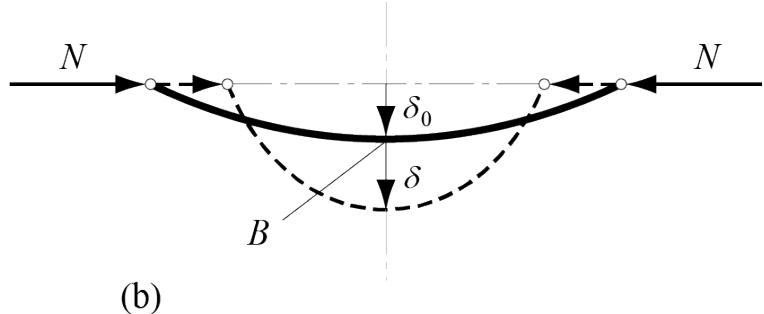
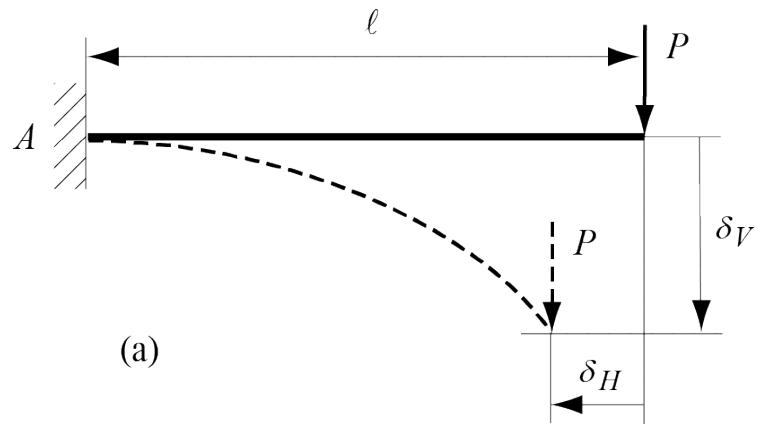
Application



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Stabilité et instabilité élastiques

Grandes déformations dans un système stable (a) ou instable (b)



S'agit-il d'un système stable ou instable?

Certains systèmes sont élastiquement instables. A partir d'un certain niveau des forces extérieures et sans pour autant que les contraintes n'aient encore atteint la limite élastique, ils subissent de grandes déformations entraînant une augmentation des efforts intérieurs et généralement la ruine du système



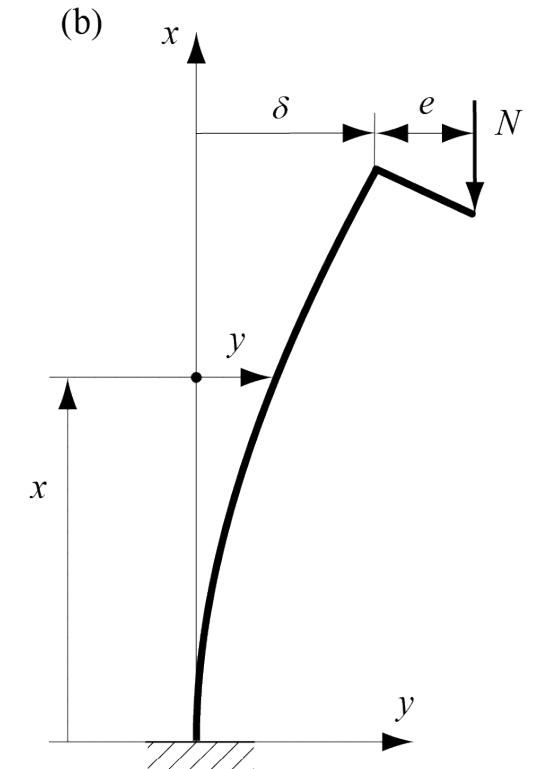
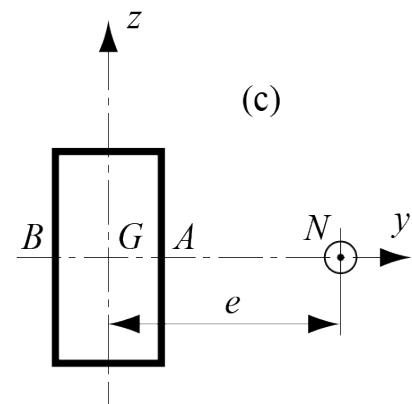
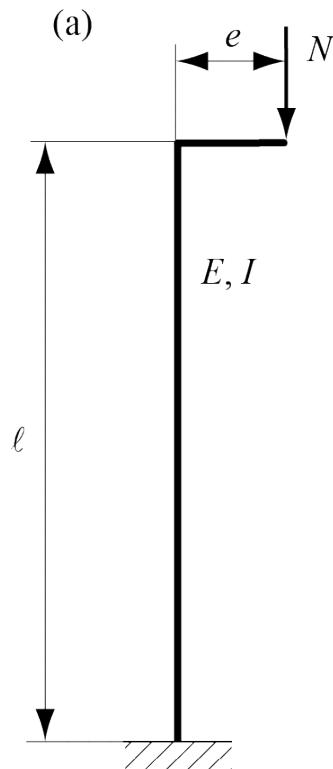
Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Formule d'Euler

Considérons une poutre soumise à une charge de compression excentrée N .

Hypothèses :

- Poutre élancée: ℓ est grande relativement aux dimensions linéaire de la section
- Moment d'inertie I_z est inférieur ou égale à I_y (exemple : poutre rectangulaire)





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Formule d'Euler

Le cas de charge considéré est donc un cas particulier de la flexion composée examinée au chapitre 8, mais, la poutre étant élancée, ***il n'est plus possible de négliger la déformation dans l'expression du moment de flexion.***

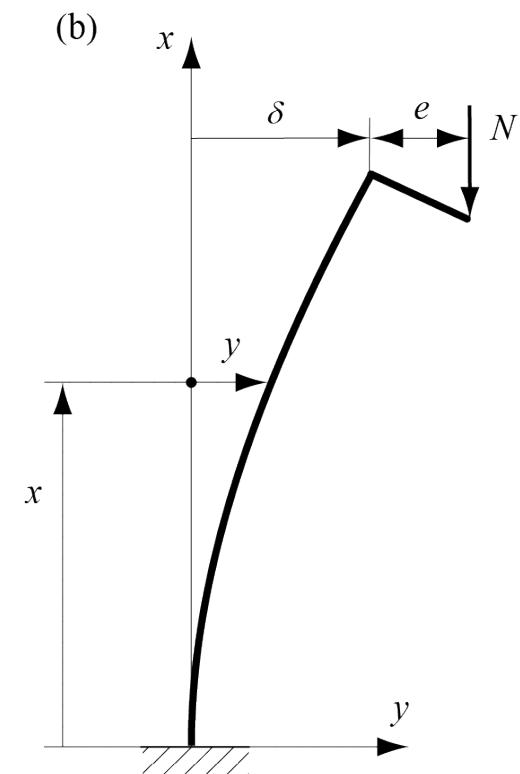
Le moment dans une section de hauteur x s'exprime au moyen de δ la flèche au sommet de la poutre, e l'excentricité et N la charge

- $M = -N(\delta + e - y)$

La déformée due au moment de flexion s'exprime alors

- $y'' = \frac{M(y)}{EI} = \frac{N}{EI}(\delta + e - y) = k^2(\delta + e - y)$

Avec la notation $k^2 = \frac{N}{EI}$





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Formule d'Euler

L'équation différentielle de la déformée

- $y'' + k^2y = k^2(\delta + e)$

Admet la solution suivante

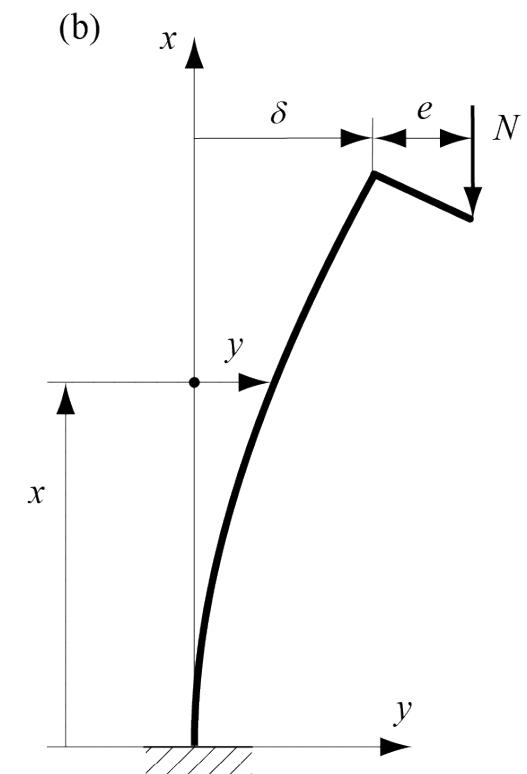
- $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + (\delta + e)$

Les conditions aux limites permettent d'exprimer les constantes C_1 et C_2

- $y'(x = 0) = 0 = C_1$
- $y(x = 0) = 0 = C_2 + (\delta + e)$

La solution devient alors

- $y = (\delta + e)(1 - \cos kx)$





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Formule d'Euler

En exprimant la flèche à l'extrémité de la poutre

- $\delta = y(x = \ell) = (\delta + e)(1 - \cos k\ell) = \frac{e}{\cos k\ell} (1 - \cos k\ell)$

On peut alors exprimer le déplacement y

- $y = \frac{e}{\cos k\ell} (1 - \cos kx)$

A la lecture de cette relation, on remarquera que la flèche δ n'est plus une fonction linéaire de la charge N et qu'elle tend même vers l'infini quand le dénominateur du membre droit de l'égalité s'annule, c'est-à-dire pour

- $\cos k\ell = 0$ ou $k = \frac{\pi}{2\ell} (1 + 2n)$

A ces valeurs particulières du facteur k correspondent les charges critiques N_c du système



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Formule d'Euler

On peut alors exprimer les charges critiques en intégrant ce facteur k dans la relation $k^2 = \frac{N}{EI}$

- $N_c = k^2 EI = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} (1 + 2n)^2$

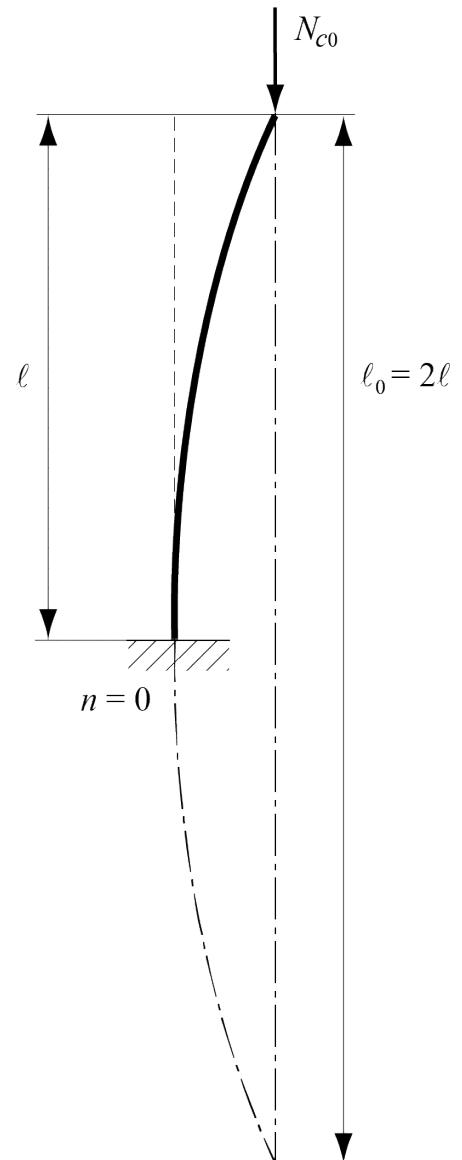
L'équation de la déformée $y = \frac{e}{\cos k\ell} (1 - \cos kx)$ est une sinusoïde dont la demi-longueur d'onde ℓ_0 est, donnée par l'égalité

- $\ell_0 = \frac{\pi}{k} = \frac{2}{1+2n} \ell$

On en tire la formule d'Euler :

- $N_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}$

La charge critique ne dépend pas de l'excentricité e contrairement au moment de flexion calculé



Mécanique des structures



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL

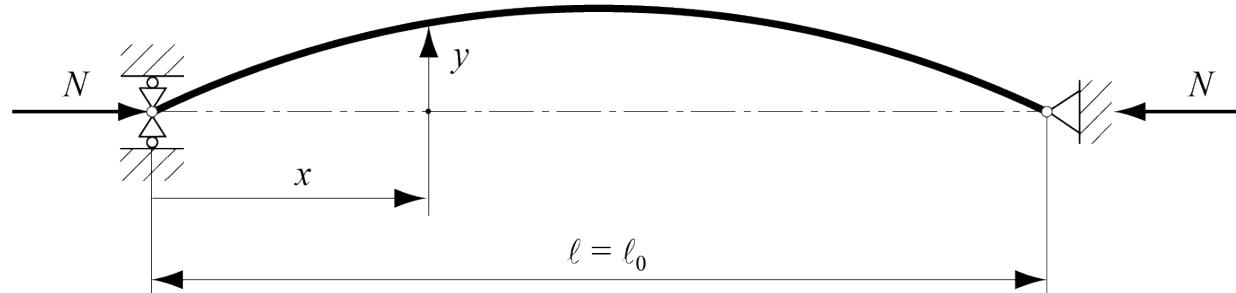




Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Amplitude de la déformation

Considérons maintenant la déformation latérale d'une poutre soumise à deux charges opposées.



Si cette déformation latérale est représentée par la variable y , le moment de flexion M à distance x de l'une des extrémités a pour expression

- $M(y) = y N$

La déformée due au moment de flexion s'exprime alors

- $y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{N}{EI}y = -k^2y$

L'équation différentielle

- $y'' + k^2y = 0$

En intégrant deux fois l'équation et en exprimant les conditions de bords

- $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$
- $y(x = 0) = 0 = C_2$
- $y(x = \ell) = 0 = C_1 \sin k\ell$

La seconde conditions de bords admet l'une des solutions suivantes

- $C_1 = 0$
- $k\ell = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

où n est un entier strictement positif. Si la constante C_1 s'annule, la déformation est nulle partout et la poutre garde sa position initiale.

Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

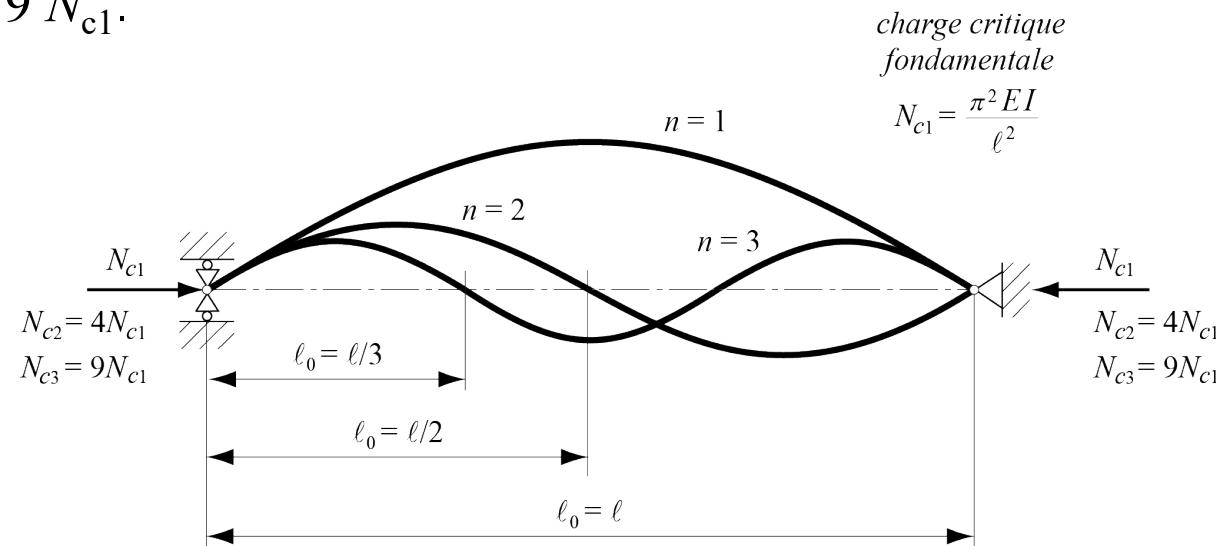
Amplitude de la déformation

Si le produit $k \ell$ est égal à $n \pi$, la charge est critique et satisfait la relation

- $N_c = k^2 EI = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} n^2 = \frac{\pi^2 EI}{(\ell/n)^2} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}$ car $k^2 = \frac{N}{EI} = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$

La figure illustre trois allures théoriques de la déformée :

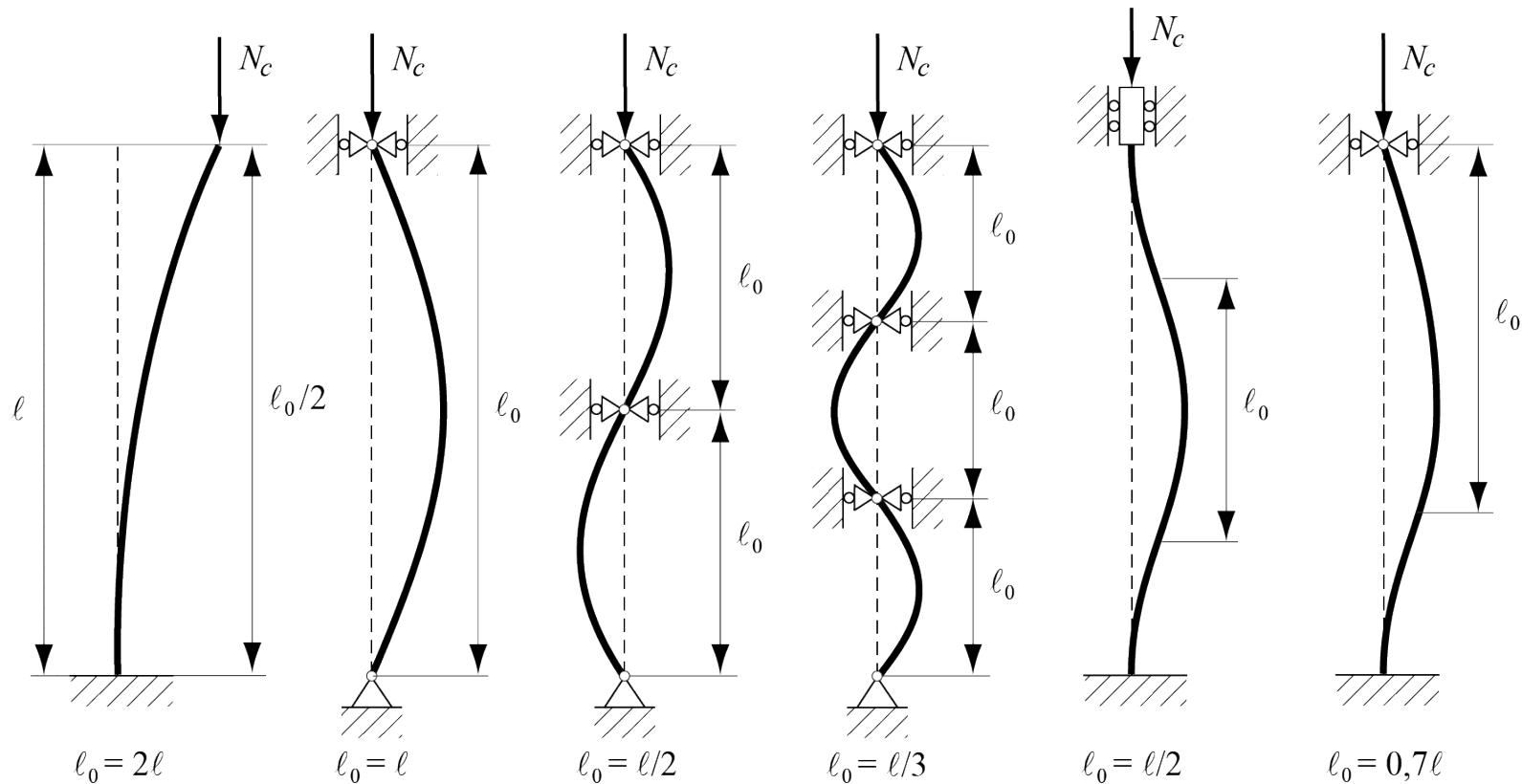
- $n = 1$; la demi-longueur d'onde vaut $\ell_0 = \ell$ et la charge critique N_c adopte la valeur fondamentale $N_{c1} = \pi^2 EI / \ell^2$;
- $n = 2$; la demi-longueur d'onde est égale à $\ell_0 = \ell/2$, tandis que la charge critique
- $n = 3$; la demi-longueur d'onde s'élève à $\ell_0 = \ell/3$ et la charge critique prend la valeur $N_{c3} = 9 N_{c1}$.



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Cas dérivés du flambage d'une poutre

On peut déduire la charge critique d'une poutre articulée aux extrémités de celle d'une poutre encastrée et réciproquement. Il suffit de chercher la valeur correcte de la demi-longueur d'onde ℓ_0 pour trouver la charge critique d'autres cas de charge qui peuvent se déduire des deux cas fondamentaux



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Flambage en dehors du domaine élastique

Le phénomène d'**instabilité** élastique correspond à la rupture d'équilibre d'un système. Il ne dépend que du **module d'élasticité du matériau et des dimensions géométriques**, alors que la valeur des contraintes ne joue aucun rôle.

Cette affirmation n'est toutefois vraie qu'en-dessous de la limite élastique du matériau ou, plus exactement, de la limite de proportionnalité. Or, il se peut que les contraintes de compression aient déjà dépassé cette limite au moment de l'instabilité.

Dans ce cas, la charge critique ne peut plus être calculée par la formule d'Euler ou les formules dérivées.

- $\sigma_c = \frac{N_c}{F}$

En introduisant N_c ainsi que le rayon de giration $i = \sqrt{I/F}$ de la section, on définit la contrainte critique comme étant

- $\sigma_c = \frac{N_c}{F} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2 F} = \frac{\pi^2 E i^2}{\ell_0^2} = \frac{\pi^2 E}{(\ell_0/i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

$\overbrace{N_c}^{\uparrow} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}$

Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Flambage en dehors du domaine élastique

La borne de validité de la formule d'Euler est fournit par l'élancement limite λ_p

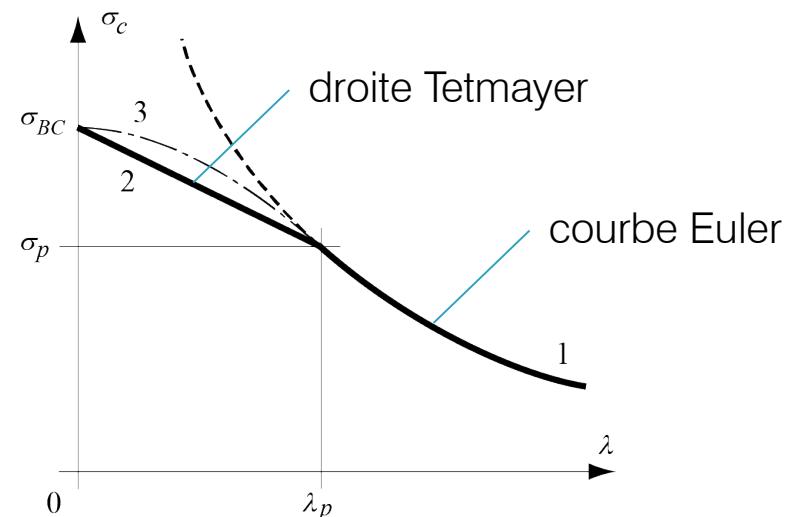
- $\lambda_p = \ell_0/i = \pi\sqrt{E/\sigma_p}$

Si la contrainte critique σ_c dépasse la limite de proportionnalité σ_p , la formule d'Euler n'est plus valable.

- $\sigma_c = \frac{N_c}{F} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2 F} = \frac{\pi^2 E i^2}{\ell_0^2} = \frac{\pi^2 E}{(\ell_0/i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

Proposée par Tetmayer, une méthode très simple pour étendre la notion de flambage au domaine plastique consiste à interpoler linéairement σ_c entre la limite de proportionnalité σ_p et la résistance à la compression σ_{BC}

- $\sigma_c = \sigma_{BC} - \frac{\lambda}{\lambda_p} (\sigma_{BC} - \sigma_p)$



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

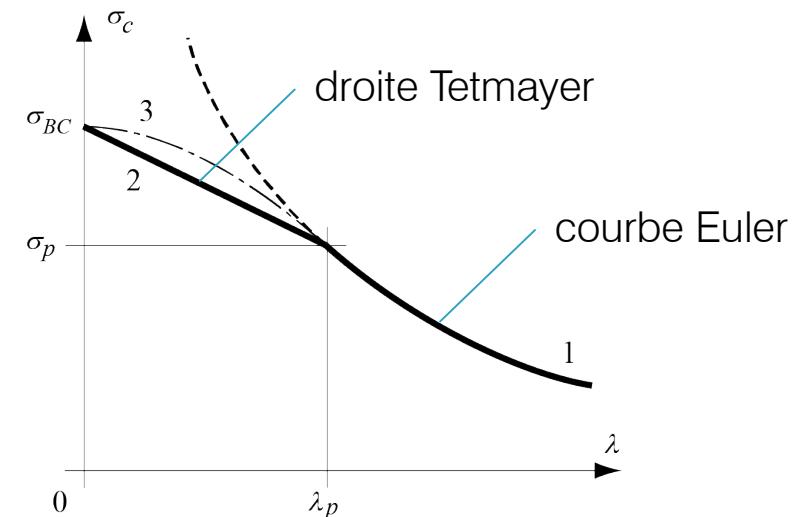
Flambage en dehors du domaine élastique

En considérant la contrainte limite de compression égale à celle de traction on peut exprimer l'élancement limite pour quelques matériaux comme étant

Matériaux	E [GPa]	σ_p [MPa]	σ_B [MPa]	λ_p
S235 (Ac37-2)	210	190	400	104
E 295 K (Ac50-2K)	210	360	720	76
EN AW-Al (Cu7Mg1 T6)	70	320	630	47

La formule de Tetmayer nous fournit alors l'expression de la contrainte critique pour ces mêmes matériaux

Matériaux	σ_c [MPa]
S235 (Ac37-2)	$400 - 2\lambda$
E 295 K (Ac50-2K)	$720 - 4.7\lambda$
EN AW-Al (Cu7Mg1 T6)	$630 - 6.6\lambda$



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Problème 12.1

Calculer l'écart de température $\Delta\theta$ qui provoque le flambage d'un tube de longueur ℓ en acier S 235, articulé à ses extrémités A et B . Déterminer les charge et contrainte critiques correspondantes et évaluer ces mêmes valeurs pour un tube encastré à ses extrémités.

Données numériques

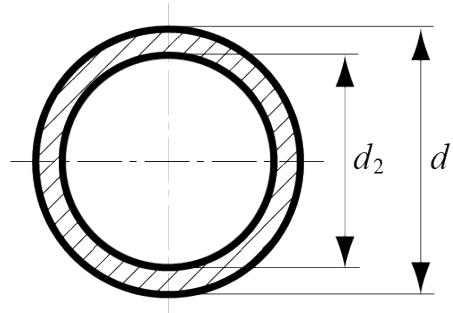
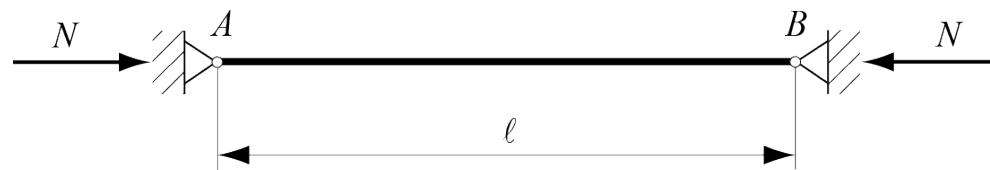
$$\ell = 2,5 \text{ m}$$

$$d_1 = 5 \text{ cm}$$

$$d_2 = 4 \text{ cm}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} / {}^\circ\text{C}$$



Mécanique des structures



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Problème 12.1

Calculer l'écart de température Δt qui provoque le flambage d'un tube de longueur ℓ en acier S 235, articulé à ses extrémités A et B . Déterminer les charge et contrainte critiques correspondantes et évaluer ces mêmes valeurs pour un tube encastré à ses extrémités.

Données numériques

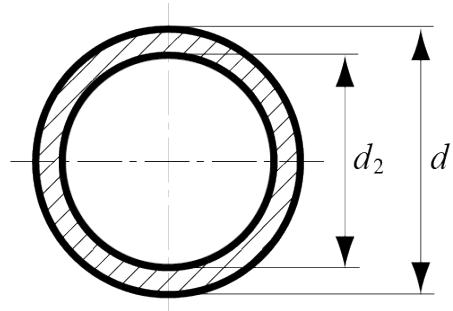
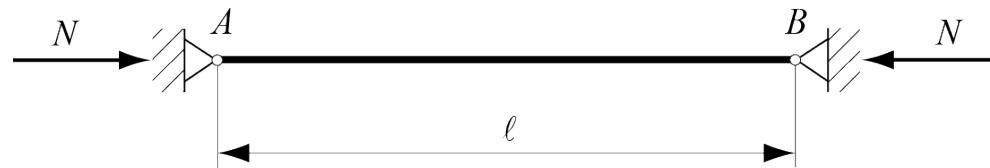
$$\ell = 2,5 \text{ m}$$

$$d_1 = 5 \text{ cm}$$

$$d_2 = 4 \text{ cm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

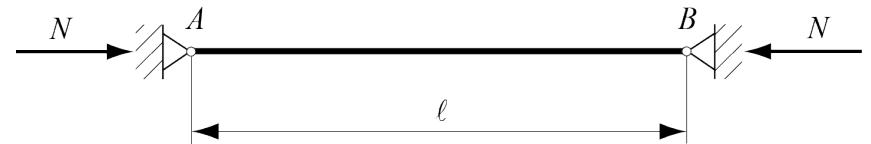
$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} / {}^\circ\text{C}$$





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

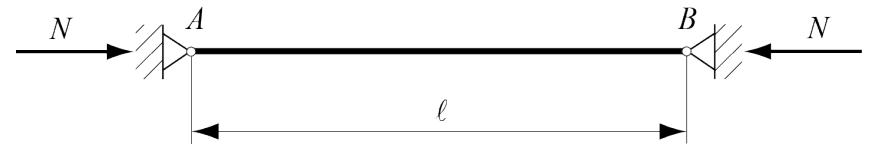
Problème 12.1





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

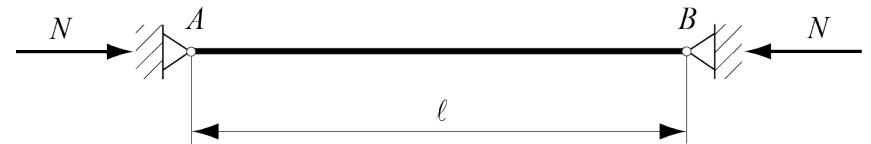
Problème 12.1





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

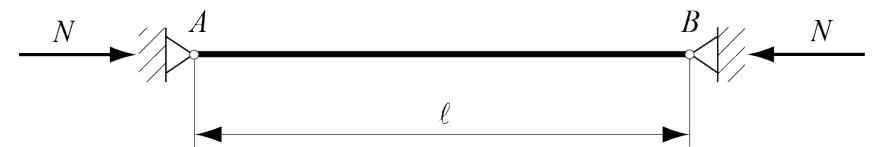
Problème 12.1





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Problème 12.1



Step: Step-1
Mode 3: EigenValue = 59439.
Primary Var: U, Magnitude

Mécanique des structures



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

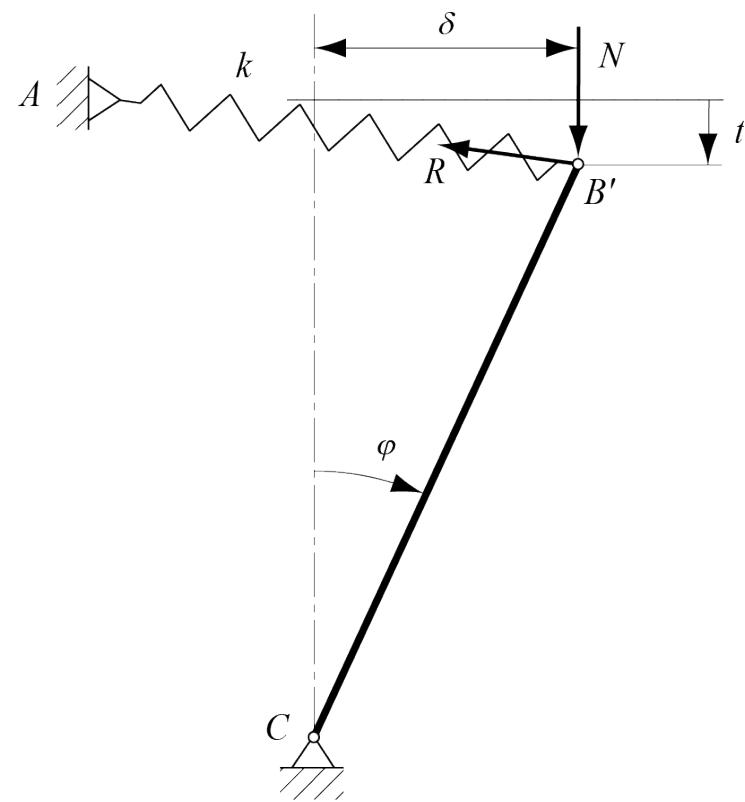
EPFL



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Stabilité et instabilité élastiques

Pour un petit déplacement horizontal δ du point B , le ressort fournit une force de rappel $R = k \delta$ et la barre tourne d'un petit angle φ .



Équilibre du moment de force au point C

- $M_C = h R - \delta N = \delta(k h - N)$



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Stabilité et instabilité élastiques

La stabilité du système est caractérisée par l'équilibre des moments de forces R et N au point C

- $M_C = h R - \delta N = \delta(k h - N)$

Trois possibilités se présentent alors :

- $N < k h$ ($M_C > 0$); le moment de rappel dû au ressort l'emporte sur le moment de la force extérieure et le système revient à sa position initiale;
- $N > k h$ ($M_C < 0$); le moment de la force extérieure l'emporte sur le moment de rappel et le système s'effondre;
- $N = k h$ ($M_C = 0$); les deux moments s'équilibrivent et le système est instable, mais pratiquement il s'effondre quand même car la plus petite imperfection géométrique suffit pour le faire quitter sa position initiale (la force $N = k h$ est la charge critique du système).

Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

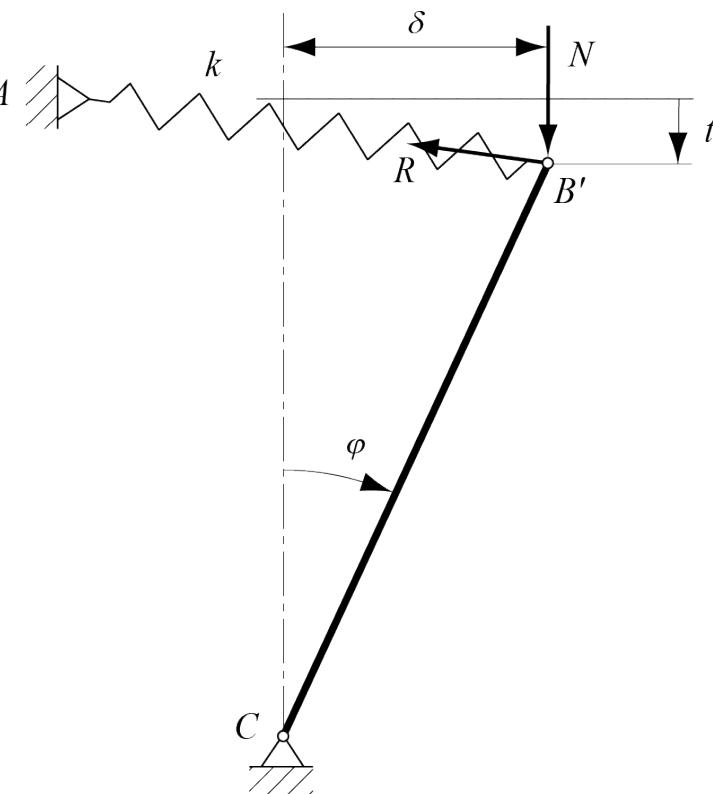
Travail et énergie de déformation

Un système est stable si sa déformation a pour conséquence de diminuer le moment de flexion interne (exemple de la poutre encastrée)

Un système devient instable lorsque les forces extérieures induisent des déformations qui entraînent une augmentation des efforts intérieurs et généralement la ruine du système

Si l'on reprend l'exemple du début du chapitre on peut définir son **énergie de déformation** et le **travail** de la force extérieure comme suit :

- $U = \frac{1}{2}R\delta = \frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}k(h \sin\varphi)^2 = \frac{1}{2}kh^2\varphi^2$
- $V = t N = h(1 - \cos\varphi)N = \frac{1}{2}h\varphi^2 N$



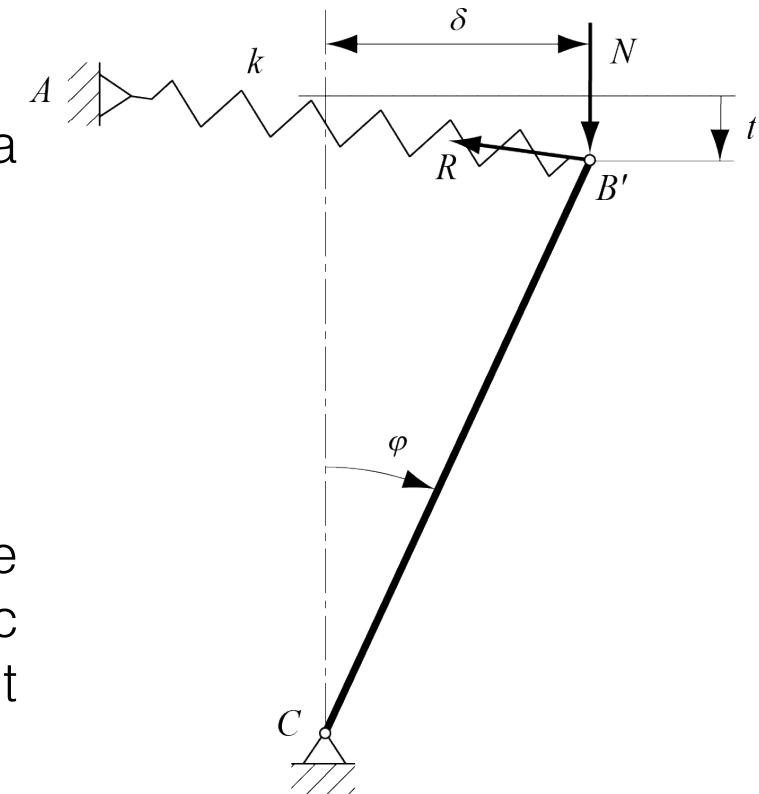
La stabilité du système dépend alors si

- $U > V$ le système est stable
- $U < V$ le système s'effondre
- $U = V$ le système est instable

Cette troisième condition permet de retrouver la charge critique déjà énoncée

- $\frac{1}{2} h\varphi^2 N_c = \frac{1}{2} k h^2 \varphi^2$
- $N_c = kh$

L'expression découlant de l'équilibre du travail de force externe et de l'énergie de déformation et donc équivalente à l'expression obtenue en cherchant l'expression du moment de flexion dans la poutre





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Méthode de Timoshenko

Le système est alors instable si le travail $V = t N$ de la force extérieure est égal à l'énergie de déformation U , la charge critique correspondante ayant pour valeur

- $N_c = \frac{U}{t}$

La méthode présente l'avantage principal d'**éviter l'intégration** de l'équation différentielle du système

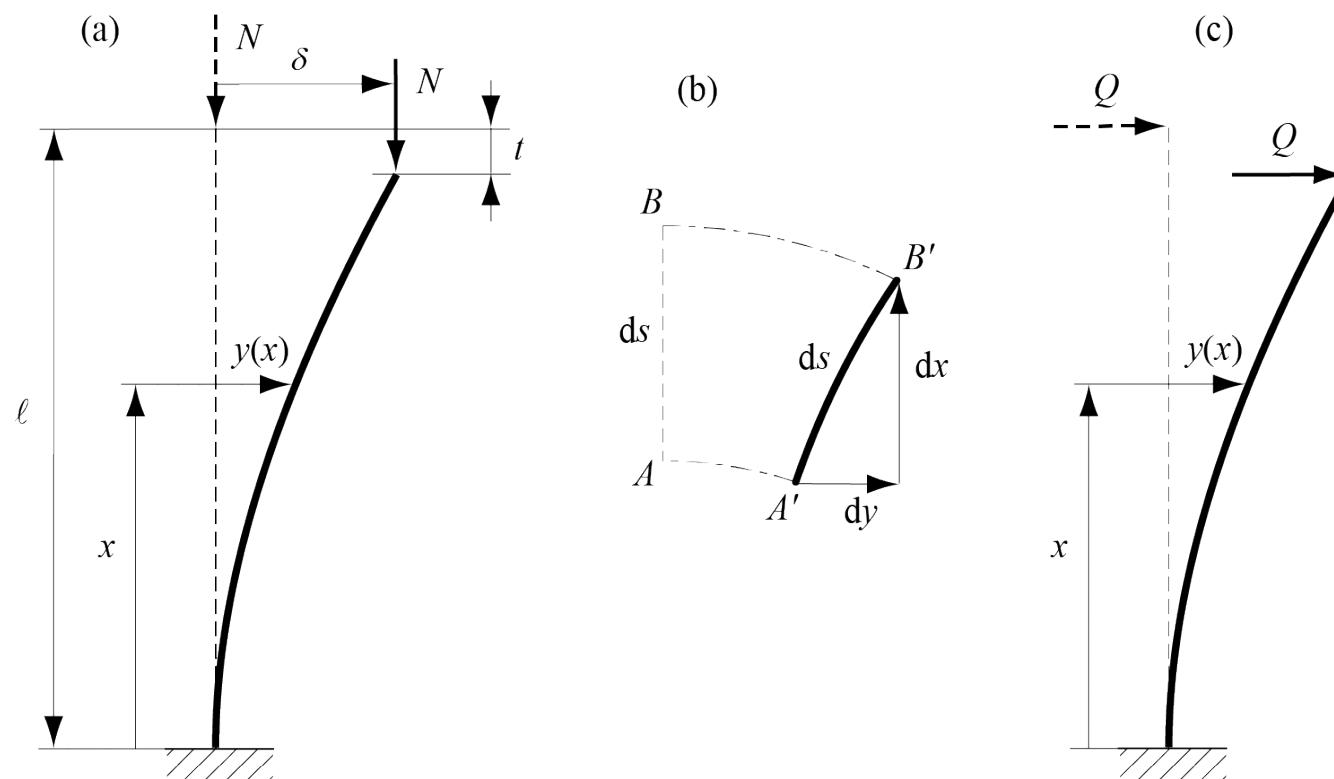
Par contre, la déformée choisie étant arbitraire, la charge critique trouvée n'est **qu'approximative**.

Elle est toujours **supérieure à la valeur exacte** car la déformée réelle prend spontanément la forme qui rend minimum la charge critique du système

Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Méthode de Timoshenko

Reprenons le cas fondamental d'une poutre encastrée soumise à une charge de compression N

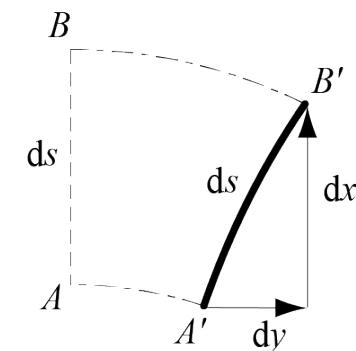


Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Méthode de Timoshenko

Deux points A et B de la poutre, distants de ds , se déplacent en A' et B' après déformation. Si l'on néglige le raccourcissement dû à la compression, l'arc $A'B'$ garde la longueur ds et la contribution de cet élément au déplacement vertical de la charge a pour valeur

- $$dt = ds - dx = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} - dx = dx \left[(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$



La dérivée y' de la déformée $y(x)$ est très petite en comparaison de l'unité car le déplacement horizontal δ est beaucoup plus faible que la longueur ℓ quand la charge devient critique

En ne conservant que les deux premiers termes du développement de la racine, on peut récrire l'équation sous la forme suivante

- $$dt = dx \left[(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \cong \left[\left(1 + \frac{1}{2}y'^2 \right) - 1 \right] = \frac{1}{2}y'^2 dx$$

$$(1 + \alpha)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2}\alpha + \dots$$

L'intégration de l'équation

- $t = \frac{1}{2} \int_0^\ell y'^2 dx$

Si l'on néglige l'influence de la compression et de l'effort tranchant, l'énergie de déformation de la poutre est donnée par l'expression simplifiée

- $U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2}{EI} dx$

En remplaçant le moment de flexion M par sa valeur tirée de la liaison entre la dérivée seconde de la déformée y et le moment fléchissant M , on trouve

- $U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2}{EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^\ell y'''^2 dx$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ M = -y''EI \end{array}$$

On obtient finalement la *formule de Timoshenko*

- $N_c = \frac{U}{t} = EI \frac{\int_0^\ell y'''^2 dx}{\int_0^\ell y'^2 dx}$

Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Application de la méthode de Timoshenko au cas fondamental

Choisissons d'abord comme déformée $y(x)$ la courbe exacte (sans excentrement e) trouvée par intégration de l'équation différentielle

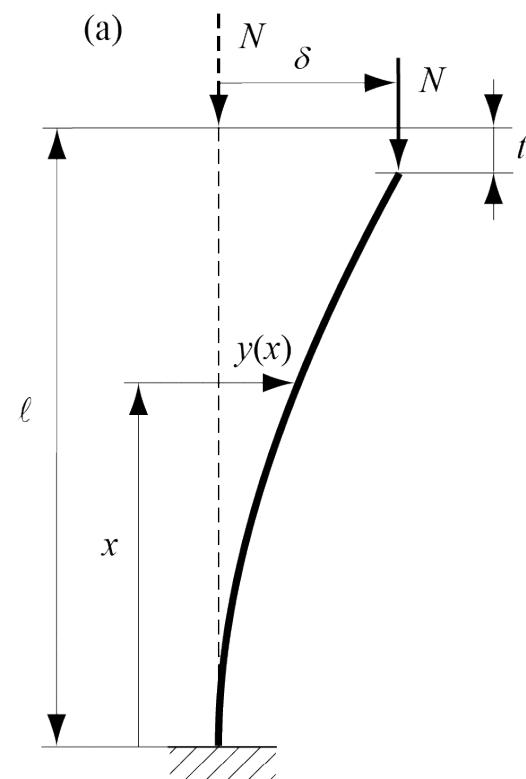
- $y'' = -\frac{N}{EI}(\delta - y) = -k^2y \quad \text{avec } k = \frac{\pi}{2\ell}$

On cherche la solution

- $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3$
- $y' = k C_1 \sin kx - k C_2 \cos kx$
- $\begin{cases} y'(x=0) = 0 = k C_1 \\ y(x=0) = 0 = C_2 + C_3 \\ y(x=\ell) = \delta = C_1 + C_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\delta \\ C_3 = \delta \end{cases}$

D'où finalement on trouve

- $y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2\ell} x\right)$





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Application de la méthode de Timoshenko au cas fondamental

Les deux dérivées successives s'écrivent

- $y' = \frac{d\left[\delta\left(1-\cos\frac{\pi}{2\ell}x\right)\right]}{dx} = \frac{\pi\delta}{2\ell} \sin\frac{\pi x}{2\ell}$
- $y'' = \frac{\pi^2\delta}{4\ell^2} \cos\frac{\pi x}{2\ell}$

Le déplacement t est donné par la formule

- $t = \frac{1}{2} \int_0^\ell y'^2 dx = \frac{\pi^2\delta^2}{8\ell^2} \int_0^\ell \sin^2\frac{\pi x}{2\ell} dx = \frac{\pi^2\delta^2}{16\ell}$

Et donc l'énergie fournie au système est égale à

- $U = \frac{EI\pi^4\delta^2}{32\ell^4} \int_0^\ell \cos^2\frac{\pi x}{2\ell} dx = \frac{EI\pi^4\delta^2}{64\ell^3}$

On trouve la charge critique en divisant l'énergie par le déplacement t

- $N_c = \frac{U}{t} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$

Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Application de la méthode de Timoshenko au cas fondamental

Supposons maintenant que la déformé $y(x)$ soit inconnue et prenons comme déformée celle que produit une force horizontale Q appliquée à l'extrémité supérieure de la poutre. Annexe IV

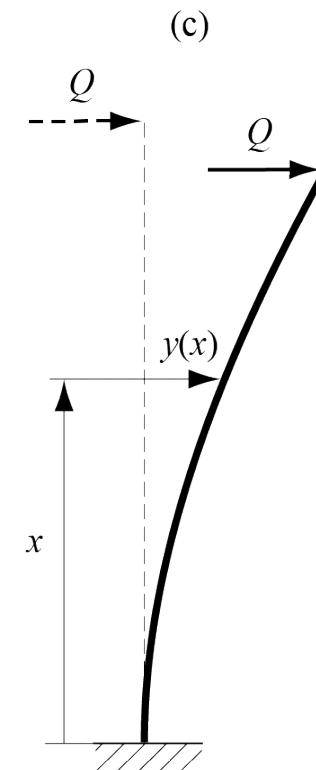
- $y = \frac{Q}{6EI} (3\ell x^2 - x^3)$
- $y' = \frac{Q}{2EI} (2\ell x - x^2)$
- $y'' = \frac{Q}{EI} (\ell - x)$

En procèdent comme précédemment on trouve

- $t = \frac{1}{2} \int_0^\ell y'^2 dx = \frac{Q^2}{8E^2I^2} \int_0^\ell (2\ell x - x^2)^2 dx = \frac{Q^2\ell^5}{15E^2I^2}$
- $U = \frac{Q^2}{2EI} \int_0^\ell (\ell - x)^2 dx = \frac{Q^2\ell^3}{6EI}$

La charge critique approchée est donnée par

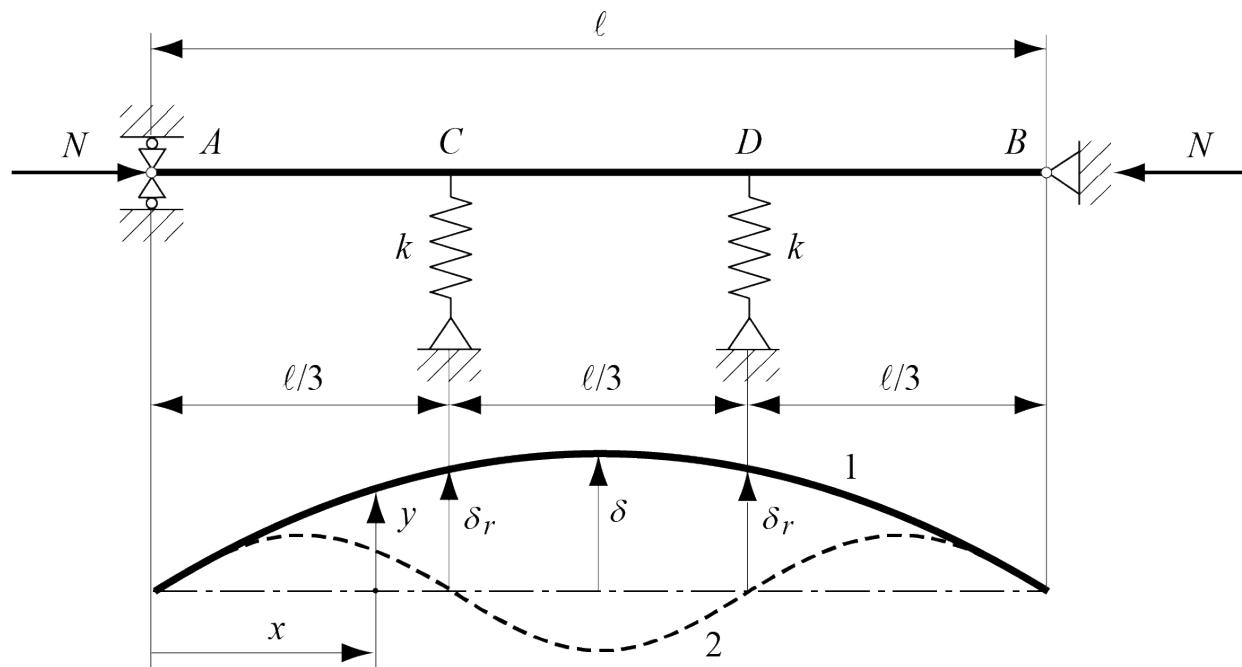
- $N'_C = \frac{U}{t} = \frac{5EI}{2\ell^2}$ est erreur relative $\varepsilon = \frac{N'_C - N_C}{N_C} = \frac{5/2 - \pi^2/4}{\pi^2/4} = +1.3\%$



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Problème 12.3

Le système représenté est constitué d'une poutre articulée à ses extrémités et de deux ressorts de constante k . Calculer la charge critique du système en prenant comme déformée celle qui se produit quand les ressorts n'existent pas, c'est à dire une sinusoïde à une demi onde (courbe 1). Trouver ensuite la valeur de la constante k pour laquelle la poutre flambe selon une sinusoïde à trois demi ondes (courbe 2).



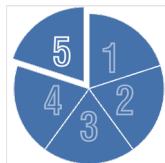
Mécanique des structures



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

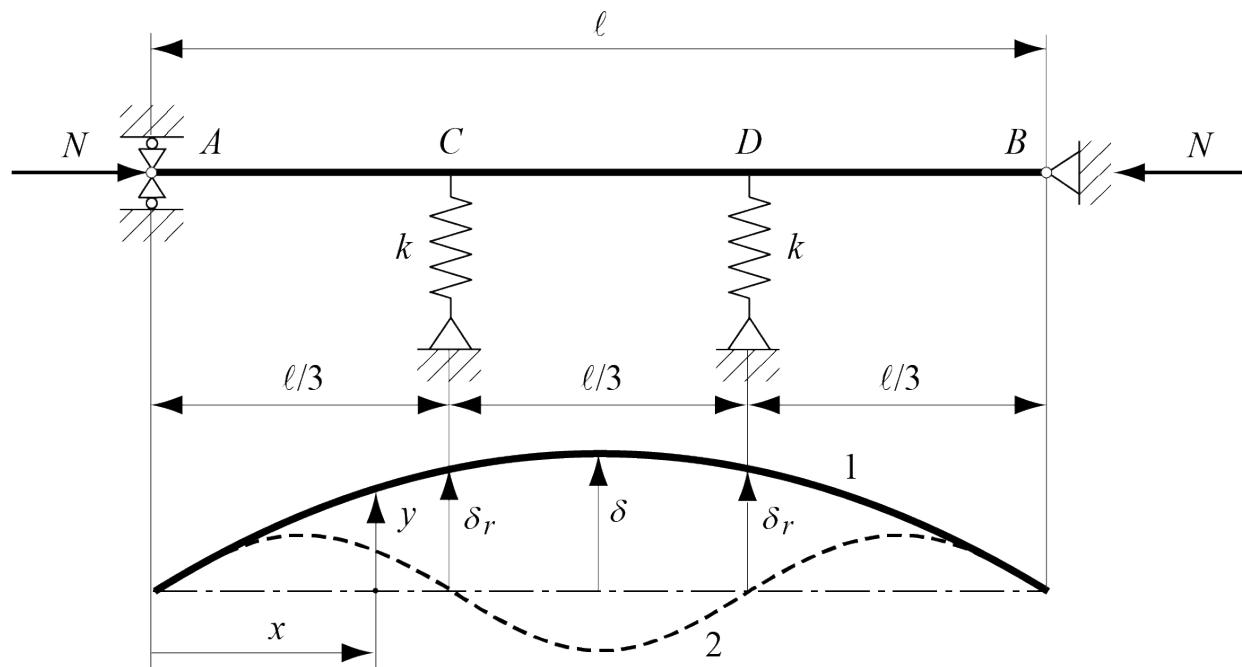
EPFL



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Problème 12.3

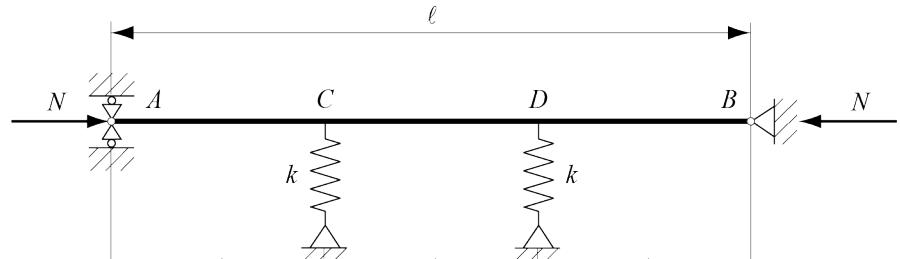
Le système représenté est constitué d'une poutre articulée à ses extrémités et de deux ressorts de constante k . Calculer la charge critique du système en prenant comme déformée celle qui se produit quand les ressorts n'existent pas, c'est à dire une sinusoïde à une demi onde (courbe 1). Trouver ensuite la valeur de la constante k pour laquelle la poutre flambe selon une sinusoïde à trois demi ondes (courbe 2).





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

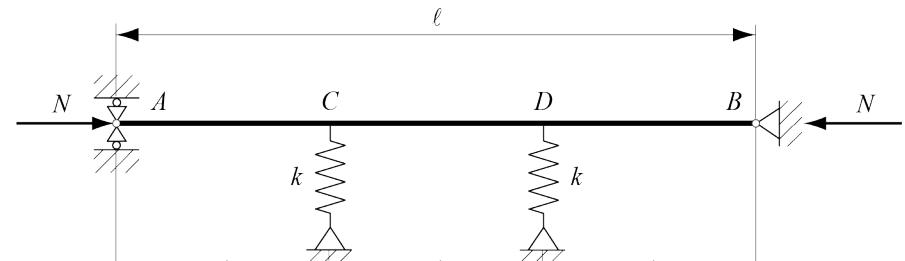
Problème 12.3





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

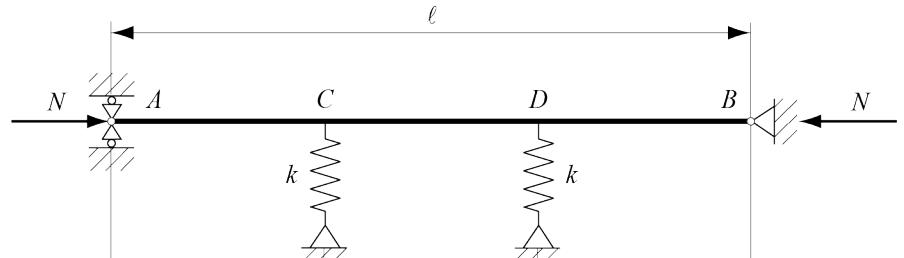
Problème 12.3





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

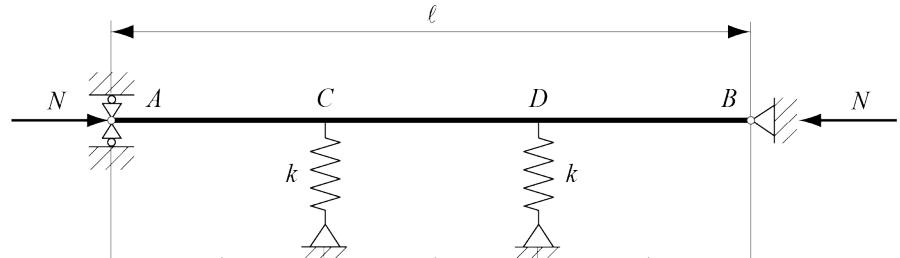
Problème 12.3





Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

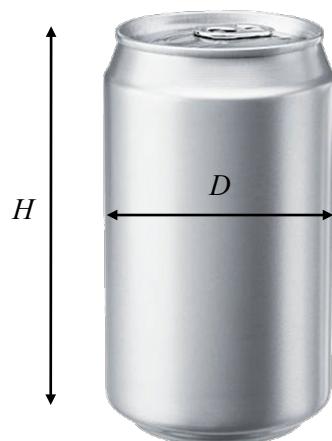
Problème 12.3



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Exemple

Déterminer la charge critique de flambage pour la canette en alliage d'aluminium schématisée ci-dessous (négligeons le rétrécissement et supposons les extrémités comme indéformables). Déterminer la charge limite en compression. Comparer ces valeurs et discuter de l'expérience d'écrasement d'une canette sous le poids d'une personne physique.



Applications :

Module de l'alliage Al	$E = 73 \text{ GPa}$
Limite de proportionnalité	$\sigma_p = 320 \text{ MPa}$
Hauteur :	$H = 11.5 \text{ cm}$
Diamètre :	$D = 7 \text{ cm}$
Épaisseur parois :	$e = 0.075 \text{ mm}$



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Exemple



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Exemple



Chapitre 12 : Flambage des poutres droites

Exemple